# Tidligere eksamensopgaver

Af Jesper Bertelsen, AU-ID: au689481

Indholdsfortegnelse

[Note 2](#_Toc125183829)

[Formler 2](#_Toc125183830)

[Eksamen 2020 2](#_Toc125183831)

[Opgave 1. Funktion af to variabler 2](#_Toc125183832)

[Spørgsmål 1. Grænseværdi 3](#_Toc125183833)

[Spørgsmål 2. Grænseværdi 3](#_Toc125183834)

[Spørgsmål 3. Gradient 3](#_Toc125183835)

[Spørgsmål 4. Retningsafledte 4](#_Toc125183836)

[Spørgsmål 5. Størrelse af største retningsafledte 4](#_Toc125183837)

[Spørgsmål 6. Ortogonale linjer 5](#_Toc125183838)

[Opgave 2. Funktion af to variabler 5](#_Toc125183839)

[Spørgsmål 1. Kritisk punkt. 5](#_Toc125183840)

[Spørgsmål 2. 6](#_Toc125183841)

[Spørgsmål 3. Arten 6](#_Toc125183842)

[Spørgsmål 4. 7](#_Toc125183843)

[Spørgsmål 5. 8](#_Toc125183844)

[Spørgsmål 6. Planintegrale 8](#_Toc125183845)

[Opgave 3. Talfølger og uendelige rækker 8](#_Toc125183846)

[Spørgsmål 1. 9](#_Toc125183847)

[Spørgsmål 2. 9](#_Toc125183848)

[Spørgsmål 3. 9](#_Toc125183849)

[Spørgsmål 4. Summen af en uendelig række 10](#_Toc125183850)

[Spørgsmål 5. 10](#_Toc125183851)

[Spørgsmål 6. Grænseværdi 13](#_Toc125183852)

[Opgave 4. Taylorrække 13](#_Toc125183853)

[Spørgsmål 1. 13](#_Toc125183854)

[Spørgsmål 2. 14](#_Toc125183855)

[Spørgsmål 3. 14](#_Toc125183856)

[Spørgsmål 4. 15](#_Toc125183857)

[Spørgsmål 5. 15](#_Toc125183858)

[Spørgsmål 6. 15](#_Toc125183859)

[Opgave 5. Polære koordinater 16](#_Toc125183860)

[Spørgsmål 1. 16](#_Toc125183861)

[Spørgsmål 2. 16](#_Toc125183862)

[Spørgsmål 3. 16](#_Toc125183863)

[Spørgsmål 4. 17](#_Toc125183864)

[Spørgsmål 5. 17](#_Toc125183865)

[Spørgsmål 6. 18](#_Toc125183866)

[Opgave 6. Differentialligninger 19](#_Toc125183867)

[Spørgsmål 1. 19](#_Toc125183868)

[Spørgsmål 2. 20](#_Toc125183869)

[Spørgsmål 3. 20](#_Toc125183870)

[Spørgsmål 4. 20](#_Toc125183871)

[Spørgsmål 5. 21](#_Toc125183872)

[Spørgsmål 6. 22](#_Toc125183873)

[Opgave 7. Stokastiske variabler 22](#_Toc125183874)

[Spørgsmål 1. 22](#_Toc125183875)

[Spørgsmål 2. 23](#_Toc125183876)

[Spørgsmål 3. 23](#_Toc125183877)

[Spørgsmål 4. 23](#_Toc125183878)

[Spørgsmål 5. 24](#_Toc125183879)

[Spørgsmål 6. 24](#_Toc125183880)

## Note

Besvarelser er hele tal fra 0 til 99.

## Formler

Retningsafledte

- Sætning 3.3, et skalarprodukts

Differentialligning

Binomialkoefficient

- Definition 10.33

Binomialfordeling

- Definition 11.4

Middelværdi

- Sætning 12.7 for binomialfordeling.

- Definition 14.1 for middelværdi for kontinuert variabler.

Varians

- Sætning 12.22 for binomialfordeling

## Eksamen 2020

### Opgave 1. Funktion af to variabler

Opgaven drejer sig om funktionen givet ved at

#### Grænseværdi

Bestem grænseværdien

Denne er til at håndtere.

Det er værdien af sinus- og cosinusfunktionerne som bliver påvirket af at værdierne går mod 0.

Værdierne vil da grænse mod hvilket medfører 0.

==================

==================

#### Grænseværdi

Bestem grænseværdien

grænser ikke kun mod nul, men har en reel værdi på 0.

Funktionen ses:

I radianer vil .

Derfor vil produktet give

Den skal differentieres.

==============

==============

#### Gradient

Find gradienten af *f* i punktet.

findes

Sammensatte differentialer følger.

================

================

#### Retningsafledte

Beregn den retningsafledte når er enhedsvektoren, der peger i samme retning som vektoren

Ud fra sætning 3.3 kan formlen her bruges.

Hvor skalar produktet findes.

==============

==============

#### Størrelse af største retningsafledte

Angiv værdien *V* af den største retningsafledte for *f* i punktet .

Den største retningsafledte vides til at være størrelsen af gradienten. |

=====

=====

#### Ortogonale linjer

Der er to forskellige enhedsvektorer, og som opfylder at,

Disse to enhedsvektorer, har samme andenkoordinat *a*. Angiv

Der vides, at det enhedsvektorerne er ortogonale linjer med gradienten.

Der ses, at uanset hvilken koordinat som enhedsvektorens x komponent er, vil dette give 0.

For at prikproduktet af y komponenterne giver 0, så kræver det, at enhedsvektorenes y komponent er 0.

Derfor medfølger.

=====

=====

### Opgave 2. Funktion af to variabler

Denne opgave handler om funktionen givet ved at

#### Kritisk punkt.

Lad være et kritisk punkt for *f* hvis anden koordinat er forskellig fra 0. .

Angiv

Kritiske punkter medfører for gradienten.

Der findes derfor 2 løsninger, x = 1 eller y = 0. Da y ikke er lige med 0, må løsningen da kunne findes ved

=====

=====

Y værdien er vilkårlig, uanset hvilken y værdi der er, vil dette altid være et kritisk punkt.

#### 

Lad være et af de kritiske punkter fra 2.1; altså et hvor . Udregn tallet *D* fra anden ordens testen.

Vi kan fortsætte fra gradienten

==========

==========

#### Arten

Lad være et af de kritiske punkter for *f* fra spørgsmål . Kun et af følgende udsagn er korrekt. Hvilket?

Globalt maksimum kan ses ud fra ligningen. Uanset hvad der indsættes vil funktionen aldrig blive større end 0.

#### 

Lad være rektanglet

Lad *V* være den største værdi som *f* antager på *R*. Angiv



Værdien af funktionen antager sin største og



mindste værdier ved følgende punkter.



1. Et randpunkt i for intervallet



1. I det kritiske punkt
2. Ved et knæk, hvis funktionen ikke er kontinuert.

Randpunkt 1, x = 2

Dens største værdi må da være når y = 0

Randpunkt 2, x = 0

Det samme som sidste randpunkt.

Randpunkt 3, y = 1

Extrumum for dette randpunkt må da kunne findes ved

Randpunkt 4, y = 0

Derfor fås 4 randpunkter, hver med værdien 5.

Det kritiske punkt var at finde i

Hvor den største værdi også er 5.

Hjørnerne tjekkes også.

Den største værdi som *f* antager i intervallet må da være 5.

=====

=====

#### 

Lad *v* være den mindste værdi som *f* antager på *R.* Angiv

Efter tjek af randpunkter, det kritiske punkt samt dens hjørner så fandt vi, at de punkter hvor den skelnede fra værdien 5 var omkring dens hjørner i punkterne , hvor dens værdier blev fundet til at være 4.

=====

=====

#### Planintegrale

Udregn planintegralet

=====================

=====================

### Opgave 3. Talfølger og uendelige rækker

Denne opgave drejer sig om talfølger og uendelige rækker

#### 

Bestem grænseværdien

Dette ses som en talfølge, den bliver ikke summet op af dens tidligere rækker, derfra vides der at.

Da væksthastigheden er betydelige større for nævneren

.

================================

================================

#### 

Bestem X således at talfølgen

Er konvergent med grænseværdi



==========

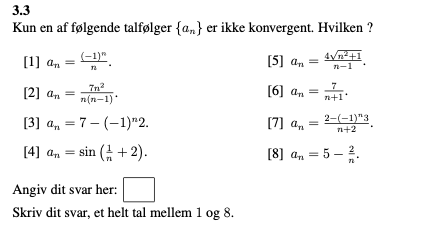
==========

Revideret



#### 

Kun en af følgende talfølger er ikke konvergent. Hvilken?



Den eneste divergente blandt de 8 talfølger blev fundet til at være

==================

==================

#### Summen af en uendelig række

Den uendelige række

Er konvergent. Find dens sum

Dette er en geometriske række, da summen af .

Summen kan da findes ved.

=========================

=========================

Hvis den havde startet i 1, så ville man skulle trække ledende op til 1 fra.

0’te led havde resulteret i 1. Så summen minus 1.

#### 

Konge video af the organic chemistry tutor!

https://www.youtube.com/watch?v=FPK6LO1iiXc

Kun en af de følgende rækker er absolut konvergent. Hvilket?

Et billede, der indeholder tekst

Automatisk genereret beskrivelse

For absolut konvergens gælder der, at er konvergent.

Følgende ulighed gælder om absolut konvergente summer:

Eksempel er et eksempel på absolut konvergent.

- Eksempel 8.60

Hvilket overraskende nok ligner række 1. Række 1 er dog en kvadreret størrelse mindre, men det må jo blot betyde, at den konvergerer hurtigere.

Med sammenligningskriteriet som fortæller os at er absolut konvergent, må vi da også kunne konkludere at er absolut konvergent



Her ses der at p er 1. Derfor er den divergent

##### Alternerende række

Her ses der en alternerende række.

For gælder der, at er divergent.

Herefter gøres der to tjek

- Tjek √

Hvis dens talfølge når gående mod uendelig er lige med 0, er rækken konvergent.

Der ses at nævneren vil ’spise’ tælleren op, når *n* går mod uendelig og dermed gælder at

- Tjek √

Dermed er rækken betinget konvergent da

Men

Skifter ikke fortegn, har ikke noget med absolut værdi at gøre.

- Alternerende række.

En absolut konvergent række er konvergent hvis

Derfor er

Hvis det passer at denne er absolut konvergent, vides det altså også, at den er konvergent.

Reglerne for alternerende rækker bruges.

Så den alternerende række er faldende.

- Tjek √

Når n går mod uendelig vil den gå mod

Den fejler derfor den alternerende række test

- Forkert √

Rækken er hverken absolut konvergent eller blot konvergent.

Rækken er divergent.

Nu har jeg lavet et par stykker. Ud fra sammenligningskriteriet siges det, at nummer 1 var absolut konvergent, dette er hvad vi går ud fra.

===

===

#### Grænseværdi

Lad være en talfølge som opfylder, at den uendelige række

- Alternerende række

Er konvergent. Bestem grænseværdien.

For at en alternerende række skal være konvergent skal den være faldende.

Derudover skal dens talfølge have grænseværdien 0.

- Tjek √

- Tjek √

Den alternerende række er da konvergent.

===========

===========

### Opgave 4. Taylorrække

I denne opgave betragtes funktionen *f* givet ved

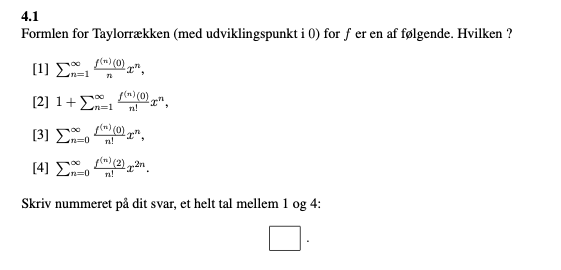
Taylorrækker i relation til denne funktion beregnes

Der approksimeres omkring x = 0

Taylor approksimationer skrives som ovenstående formler.

#### 

Formlen for Taylorrækken (med udviklingspunkt i 0) for *f* er en af følgende. Hvilken?





Formlen for taylorrækken med udviklingspunkt i 0 er

=======

=======

#### 

Beregn begyndelsen af Taylorrækken med udviklingspunkt i 0 for *f*

Pro move af frode

Efter 10 trin i proksimationen af funktionen fås at den manglende eksponent er

====

|10|

====

#### 

Angiv den afledede

Kunne det være nemmere? Det tror jeg ikke!

===============

===============

#### 

Angiv de første led i Taylorrækken (med udiklingspunkt i 0) for den afledede *f’.*

De første led i Taylorrækken for f var

De første led i Taylorrækken for *f*’ er da.

=================

=================

#### 

Angiv de første led i Taylorrækken (med udviklingspunkt i 0) for den stamfunktion *F* til *f*, som antager værdien

Nu integreres der over de første led for *f*.

Det manglende tal er derfor.

====

|11|

====

#### 

Angiv de første led i Talorrækken med udviklingspunkt i 0 for funktionen

Vi kender den allerede for , ganges på.

Det manglende tal er derfor

====

====

### Opgave 5. Polære koordinater

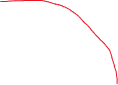
Lad *D* betegne området i planen givet ved



Hvis betegner de polære koordinater for et punkt , hvad skal så opfylde, hvis



Angiv det rigtige



Ud fra skitsen kan vi tolke at intervallet må være



#### 

Hvis betegner de polære koordinater for et punkt , hvad skal *r* så opfylde, hvis

Angiv det rigtige.

Her kan tolkningen igen bruges. Der så at radiussen var fra 2 ud til 3.

#### 

Udregn arealet *A(D)* af *D:*

*Arealet af en cirkel er*

*Vinkelsummen er*

==========

==========

Det manglende tal er

======

======

#### 

Rumfanget af mængden

Beregnes:



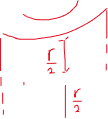
===

===

#### 

Rumfanget af mængden

Beregnes:



Værdi mængdens interval er nu kun på en halv radius, hvor den før var på en hel radius.

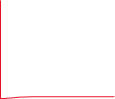
Det eneste der behøves at gøres er at halvere det tidligere rumfang.

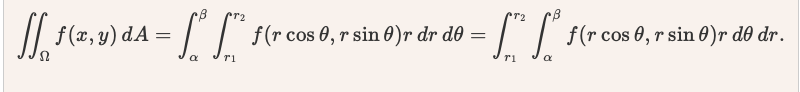
==========

==========



Lad *f* være en kontinuert funktion af en variabel, som opfylder at . Udregn dobbelt integralet





På heldig vis har vi nu fundet noget vi kender til.

Var den ene start betingelse vi fik.

Derfor kender vi nu svaret.

====

====

### Opgave 6. Differentialligninger

Denne opgave handler om differentialligninger

#### 

Lad *y* være en løsning til den logistiske differentialligning

Der ikke er nul-funktionen. Angiv

Der omskrives

Denne differentialligning kender vi løsningen til

==============

==============

#### 

Find løsningen *y* til den logistiske differentialligning

Som opfylder, at . Angiv

Da alle led tager udgangspunkt i x = 0 kan følgende gøres:

==============

==============

#### 

Find den løsning *y* til den homogene differentialligning

Der opfylder, at og . Angiv

Der substitueres

====================

====================

#### 

Find en løsning *y* til den homogene differentialligning (1) der opfylder, at .

Angiv

Der bruges reglen om at se det som et polynomium.

Dette er et andengradspolynomium.

Herfra ses nulpunkterne.

Fra sætning 7.3 i bogen vides der, at løsningen for homogene 2. ordens ligninger, som denne er findes som.

Derfra havde vi to krav.



====================

====================

#### 

Bestem det tal *a* som opfylder, at funktionen er en løsning til den inhomogene differentialligning

Der prøves noget

Derfor findes a til at være.

=============

=============

#### 

Find den løsning *y* til den inhomogene differentialligning (2) som opfylder, at og

====================

====================

### Opgave 7. Stokastiske variabler

Opgaven drejer sig om storkastiske variabler.

#### 

Lad X og Y være stokastiske variable som opfylder, at X er binomialfordelt med antalsparameter 21 og sandsynlighedsparameter , mens Y er binomialfordelt med antalsparameter 8 og sandsynlighedsparameter . Bestem det reelle tal a ∈ R som opfylder, at den stokastiske variable aX + Y har middelværdi

Regneregler for middelværdi bruges

For binomial fordeling gælder

- Sætning 12.7

=====

=====

#### 

Lad X være den stokastiske variable fra 7.1 X er altså binomialfordelt med antalsparameter 21 og sandsynlighedsparameter . Bestem det positive tal *a* som opfylder, at variansen af er 168

Formlen for varians ved binomialfordeling, fra bogen, bruges.

- Sætning 12.22 for binomialfordeling

Fra vores regneregler far variansen vides der, at hvis en konstant skal rykkes ud, så skal denne kvadreres, da variansen er en kvadreret funktion.

===========

===========

#### 

Lad *Y* være den stokastiske variable fra 7.1 Y har altså n = 8, p = .

Find sandsynligheden *P(* for at *Y* antager værdien 4.

================

================

#### 

Lad *a* være et reelt tal og sæt . Angiv den værdi af *a* for hvilken *f* er en tæthedsfunktion på intervallet .

Om tæthedsfunktioner gælder der, at summen af alle dens værdier skal give 1.

=====

=====

#### 

Funktionen

Er en tæthedsfunktion på intervallet . Lad Z være en storkastisk variabel med tæthedsfunktionen *g*. Bestem sandsynligheden for at .

=====================

=====================

#### 

Lad Z være den stokastiske variable med tæthedsfunktionen *g* fra 7.5. Bestem middelværdien af .

Formel fra bogen bruges

- Definition 14.1 for middelværdi for kontinuert variabler.

============

============